一种新的相干信源DOA估计算法：加权空间平滑协方差矩阵的Toeplitz矩阵拟合

王布宏[1,2]，王永良[1]，陈 辉[1]
(1.空军雷达学院雷达兵器运用工程全军重点实验室，湖北武汉 430010；2.空军工程大学，陕西西安 710077)

摘 要：文献[1]提出的最优加权空间平滑技术可以使相干源存在时的信源协方差矩阵恢复为对角阵.由于文献[1]中导出的最优权矩阵是空间信源方位的函数矩阵，本文利用最优加权空间平滑后阵列协方差矩阵的Toeplitz性，构造了一个全新的优化拟合的代价函数，并基于此提出了一种相干源方位估计的新算法.与文献[1]不同，算法的实现不需要方位估计的先验知识和协方差矩阵的去噪预处理.分辨性能的蒙特卡罗仿真实验表明，新算法对空间相干信源的分辨性能优于常规的空间平滑算法和最大似然算法，在小阵列和信源空间间隔较近时，算法的优越性尤为突出.

关键词：DOA估计；相干信源；Toeplitz矩阵；矩阵拟合；遗传算法
中图分类号：TN911.7 **文献标识码**：A **文章编号**：0372-2112(2003)09-1394-04

A Novel Genetic Approach to DOA Estimation of Coherent Sources Based on Weighted Spatial Smoothing and Toeplitz Matrix Fitting

WANG Bu-hong[1,2], WANG Yong-liang[1], CHEN Hui[1]
(1. *Key Research Lab, Air Force Radar Academy, Wuhan, Hubei* 430010, *China*; 2. *Air Force Engineering University, Xi'an, Shaanxi* 710077, *China*)

Abstract: The optimal weighted spatial smoothing (WSS) technique proposed in [1] is capable of de-correlating the coherent sources perfectly, with the equivalent sources covariance matrix diagonal. Based on the fact that the optimal weight matrix in [1] is a function matrix of source directions and the array covariance matrix after optimal WSS is Toeplitz, a new cost function is constructed. The bearing estimates can then be achieved by virtue of a genetic-algorithm-based Toeplitz matrix fitting. Compared with [1], the proposed algorithm can be realized without the a priori knowledge about source directions and de-noising preprocessing. The Monte-Carlo simulation results demonstrate that the new algorithm is highly superior to the conventional SS (spatial smoothing) technique in the resolving ability for spatially-closed coherent sources, especially in the case of small array size. Besides, the comparison of new methods with maximum-likelihood methods is also presented.

Key words: direction-of-arrival estimation; coherent sources; Toeplitz matrix; matrix fitting; genetic algorithms

1 引言

以MUSIC算法为代表的子空间类高分辨DOA估计算法对于非相干或相关程度较小的空间信源具有良好的分辨性能，且运算量较小.但它们优良的分辨性能却会随空间信源间的相关程度的增加而逐渐恶化，直至失效.空间平滑SS算法(Spatial Smoothing[2~5])是一种常用的解相干预处理方法.文献[2]对空间前向平滑技术(Forward SS)进行了深入的研究和讨论，文献[3~5]对前后双向空间平滑技术(Forward-Backward SS)进行了深入的研究和讨论.但上述提到的种种SS技术都是通过牺牲阵列的有效孔径来获得其解相干能力的.由于阵列孔径的损失，算法对相干源的分辨能力都有较大幅度的下降.而且上述的SS技术只能使信源协方差矩阵恢复为满秩，SS预处理后信源间仍然是相关的，随后进行的常规子空间类算法的分辨能力仍然会受到影响.

如何使空间相干信源彻底解相关，使等效的信源协方差矩阵恢复为对角阵，一直是国内外学者研究的方向和目标.为了最大限度地对空间相干信源解相关，提高SS预处理后子空间类算法的分辨能力.人们提出了一些加权的空间平滑机制[6~10]，但我们注意到，上述种种加权SS技术往往忽略了对子阵输出互相关信息的利用.相应地，为了使空间相干信源彻底解相关，通常它们所需的平滑次数很大.最近，在文献[1]中作者充分利用了子阵输出的自相关和互相关信息，提出一种新的加权空间平滑技术(WSS:weighted spatial smoothing)来对相干源进行解相关，并推导了使相干信源彻底解相关的最优加权矩阵的理论表达式，WSS技术大大减少了使相干信源彻底解相关所需的平滑次数.由于文献[1]中导出的最优权矩阵是空间信源方位的函数矩阵，本文利用最优加权空间平滑后阵

收稿日期：2002-06-03；修回日期：2003-05-18
基金项目：国家自然科学基金(No.60272086)；全国高等学校优秀青年教师教学科研奖励计划(TRAPOYT)

列协方差矩阵的 Toeplitz 性,提出了一种基于矩阵 Toeplitz 拟合的相干源方位估计算法. 与文献[1]不同,新算法的实现不需要方位估计的先验知识和协方差矩阵的解噪预处理.

2　窄带阵列数学模型

对于 N 元均匀线阵,阵元间距为 d,且假设均为各向同性阵元. 阵列远场中在以线阵轴线法线为参考的 $\theta_k(k=1,2,\cdots,M)$ 处有 M 个窄带点源以平面波入射(波长为 λ). 阵列接收的快拍数据可由式(1)表示为:

$$X(t)=A(\theta)S(t)+N(t) \tag{1}$$

式中 $X(t)$ 为 $N\times1$ 快拍数据矢量. $N(t)$ 为 $N\times1$ 阵列噪声矢量,阵列噪声假定为空时独立的高斯白噪声,均值为 0,方差为 σ^2. $S(t)$ 为信号矢量. θ 为信源方位矢量. $A(\theta)$ 为阵列的流形矩阵,$A(\theta)=[a(\theta_1),a(\theta_2),\cdots,a(\theta_M)]$,其中 $a(\theta_k)=[1,e^{j\beta_k},\cdots,e^{j(N-1)\beta_k}]^T$, $k=1\cdots M$ 为第 k 个信源的导向矢量,β_k 为信源波数由式(2)表示为:

$$\beta_k=\frac{2\pi}{\lambda}d\sin(\theta_k) \tag{2}$$

阵列的协方差矩阵 R 定义为:

$$R=E[X(t)X^H(t)]=AR_SA^H+\sigma^2 I \tag{3}$$

其中 $R_S=E[S(t)S^H(t)]$为信源的协方差矩阵. I 为单位阵.

对于相干信源的情形,奇异的信源协方差矩阵 R_S 的秩将退化为 1,当我们对 R 进行特征分解后,信号子空间的维数(为 1)将小于阵列流形矩阵 $A(\theta)$的秩,导致了相干源对应的阵列导向矢量 $a(\theta_k)$ 将不再正交于噪声子空间,以致于以 MUSIC 为代表的子空间类算法彻底失效.

3　加权空间平滑算法

常规的空间平滑(SS)是一种有效的用于相干源 DOA 估计的预处理方法(为了论述简要,本文仅考虑前向空间平滑 FSS). 它利用均匀线阵(ULA)的平移不变性,将阵列划分为相互重叠的 L 个子阵,对应每个子阵中阵元个数为 $m=N-L+1$. 分别计算 L 个子阵的协方差矩阵,然后进行简单的算术平均,从而形成一个平滑后的 m 元阵列的协方差矩阵 R_f'

$$R_f'=\frac{1}{L}\sum_{k=1}^{L}F_kRF_k^T \tag{4}$$

其中 $F_k=[0_{m\times(k-1)}|\ I_m|\ 0_{m\times(N-k-m+1)}]$. 空间平滑技术实质上是将原主阵协方差矩阵 R 的沿主对角线的 L 个 m 阶子矩阵进行了简单的算术平均,它只利用了子阵输出的自相关信息而忽略了子阵输出的互相关信息(对应于阵列协方差矩阵 R 除沿主对角线的 L 个 m 阶子矩阵之外的 L^2-L 个 m 阶子矩阵).

为了充分利用子阵输出的自相关和互相关信息,并对空间相干信源彻底解相关,文献[1]中提出了一种新的加权空间平滑技术(WSS). 它将原主阵协方差矩阵 R 中所有的 L^2 个 m 阶子矩阵进行加权平均. 加权平滑后的 m 元阵列协方差矩阵 R_w' 可由式(5)所示:

$$R_w'=\sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{L}F_iRF_j^Hw_{ij} \tag{5}$$

定义加权矩阵 W 如式(6)所示:

$$W=\begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1L}\\ w_{21} & \ddots & \ddots & w_{2L}\\ \cdots & \ddots & \ddots & \cdots\\ w_{L1} & w_{L2} & \cdots & w_{LL}\end{bmatrix} \tag{6}$$

则经 WSS 平滑后的 m 元阵列协方差矩阵 R_w' 可表示如式(7～11)

$$R_w'=A_mR_s'A_m^H+Q_N' \tag{7}$$

$$R_s'=R_s\cdot(B^HWB) \tag{8}$$

$$Q_N'=\sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{L}F_iF_j^Hw_{ij} \tag{9}$$

$$B=[b_1\ b_2\cdots b_M] \tag{10}$$

$$b_k=[1\quad e^{-j\beta_k}\quad e^{-j2\beta_k}\quad\cdots\quad e^{-j(L-1)\beta_k}]^T \tag{11}$$

其中 R_s'为平滑后等价的信源协方差矩阵,Q_N' 为平滑后等价的阵列噪声协方差矩阵. 其中$(\cdot)$为矩阵的 Hadamard 积(对应元素相乘).

为了对空间相干信源进行彻底解相干,使加权平滑后等价的信源协方差矩阵变为对角阵. 文献[1]中选取最优加权矩阵 W_{opt}为

$$W_{opt}=(BB^H)^+ \tag{12}$$

其中上标 $^+$ 表示矩阵的 Moore-Penroser 伪逆.

从式(12)和式(9)可见:

(1)最优权矩阵式(12)是信源真实方位的函数矩阵,而信源方位正是欲求的,在文献[1]中,采用的方法是通过利用方位的先验知识在真实信源方位附近选取角度来构造最优权矢量或通过任意选取方位估计的初值进行 WSS 算法方位估计的迭代运算;

(2)WSS 算法引入了等效的阵列相关噪声协方差矩阵 Q_N',在低信噪比的情况下对算法的性能会有不利的影响,文献[1]中我们采用了阵列协方差阵列 R 的去噪预处理,来抑制相关噪声的影响.

4　基于矩阵 Toeplitz 拟合的相干源 DOA 估计算法

对于理想的独立源的情形,基于式(3)的阵列模型,阵列协方差矩阵 R 应具有 Toeplitz 性. 当我们引入如式(12)的加权矩阵 W_{opt}时,我们可以在保留空间信源方位信息的同时,对空间相干信源彻底解相关,将原信源协方差矩阵 R_S 中的非对角线上的信源互相关因子置零,使加权平滑后等效的信源协方差矩阵 R_S' 变为对角阵. 相应地,在无阵列噪声的情况下,R_w' 应具有 Toeplitz 性.

另外,我们注意到,虽然 WSS 引入了一个非白化的阵列噪声协方差矩阵 Q_N',但由于矩阵 $F_iF_j^H$ 的 Toeplitz 性和矩阵 Toeplitz 性的线性叠加性,矩阵 Q_N' 将始终保持 Toeplitz 性,它的引入并不会影响用加权矩阵(12)进行加权平滑后 R_w' 的 Toeplitz 性. 所以我们得出如下结论:

当 WSS 算法中加权矩阵 W 取如式(12)时,加权平滑后的阵列协方差矩阵 R_w' 将具有 Toeplitz 性.

由于最优权矩阵(12)是信源真实方位的函数矩阵,所以

寻找最优加权矩阵的过程实际上可以看作一个方位估计的过程. 我们可以通过 $R'_w(\theta)$ 的 Toeplitz 矩阵拟合来获得信源方位的估计,如式(13)～(17)所示:

$$\hat{\theta} = \min_{\theta} \| R'_w(\theta) - R'_T(\theta) \|_F^2 \quad (13)$$

$$R'_w(\theta) = \sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{L} F_i R F_j^H w_{ij}(\theta) \quad (14)$$

$$R'_T(\theta) = \text{Toeplitz}[r_1, r_2, \cdots, r_m] \quad (15)$$

$$r_i = \frac{1}{m-i+1}\sum_{p=1}^{m-i+1}[R'_w(\theta)]_{p,p+i-1}, i=1,2,\cdots,m \quad (16)$$

$$W(\theta) = (B(\theta) B^H(\theta))^+ \quad (17)$$

其中 $[R'_w(\theta)]_{p,p+i-1}$ 为矩阵 $R'_w(\theta)$ 的第 p 行 $p+i-1$ 列的元素,相应地,$R'_T(\theta)$ 是 $R'_w(\theta)$ 对应的 Toeplitz 矩阵形式.

从上面的分析可知,与文献[1]中的预处理算法不同,新算法的实现不需要方位估计的先验知识和协方差矩阵的去噪预处理. 在本文算法的实现中我们采用了遗传算法作为优化拟合工具,遗传算法的初始群体是在阵列 FOV(Field of View)内随机选择的 P 个的信源方位估计矢量 $[\theta_1, \theta_2, \theta_3, \cdots, \theta_P]$,其中 P 为初始群体规模,个体的适应度由 $R'_w(\theta)$ 与 $R'_T(\theta)$ 的拟合程度来决定,经过遗传算法的自适应概率搜索后,我们将最终群体中的最优个体作为我们的方位估值.

5 计算机仿真结果

我们使用阵元间距为 0.5 倍波长的均匀线阵. 分别使用本文算法、SS 算法和 ML 算法对信源方位进行估计. 本文算法和 ML 算法实现中遗传算法[11]的参数选择如下表 1 所示.

表 1 遗传算法的参数选择

个体编码	实数多参数级联编码
初始群体	随机产生,$P = 100$
选择算子	Roulette 比例选择算子
交叉算子	算术交叉 + 启发式交叉
变异算子	均匀变异 + 非均匀变异
终止条件	最大代数 = 150

实验 1 不同阵元数情况下的本文算法与常规 SS 算法性能比较.

在空间中以阵列的法线方向为参考的 35 度、40 度的方位上有 2 个等功率的全相干的信源. 快拍数 200,信噪比固定为 20dB、子阵平滑次数为 3、当阵元数从 6 变到 16 分别对本文算法和 SS 算法进行分辨性能的 100 次 Monte-Carlo 统计实验. 图 1～3 给出了 35 度方位估计成功概率、估计偏差、估计方差的比较曲线.(当空间信源的方位估值与真实信源方位相差小于等于 1 度时认为估计成功.)实验结果表明,在阵元数较小时 SS 算法根本无法对 35 度和 40 度两个空间信源进行分辨,空间谱曲线总是在 37.5 度附近形成虚假谱峰. 而本文算法在 150 代的进化搜索后可以稳健、准确地收敛到信源真实方位附近. 从实验结果我们可以算出本文算法的分辨性能远远优于常规的空间平滑技术,特别是在小阵列时,优越性更为突出. 但值得提出的本文算法是一个多维搜索算法,它的运算量较常规的空间平滑算法要大.

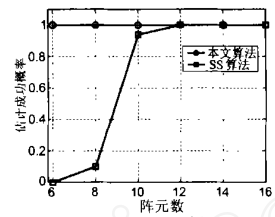

图 1 阵元数变化时本文算法与 SS 算法的成功概率比较曲线

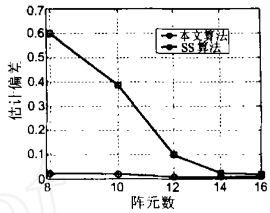

图 2 阵元数变化时本文算法与 SS 算法的估计偏差比较曲线

实验 2 本文算法分辨性能与最大似然算法的比较.

本实验中,将本文算法与 ML 算法对相干信源的分辨能力进行比较,我们进行了如下的 Monte-Carlo 统计实验. 在空间中以阵列的法线方向为参考的 8 度、10 度的方位上有 2 个等功率的全相干的信源,阵元数固定为 6、快拍数为 200,本文算法子阵平滑次数为 4,ML 算法使用 6 元阵的阵列孔径. 当信噪比从 0dB 变化到 50dB 时,对本文算法和 ML 算法进行了分辨性能的 100 次 Monte-Carlo 统计实验. 图 4～6 给出了 8 度方位估计成功概率、估计偏差、估计方差的比较曲线.(当空间信源的方位估值与真实信源方位相差小于等于 1 度时认为估计成功.)实验结果表明,本文算法的信噪比门限明显低于 ML 算法,估计偏差与 ML 相似,但估计方差较 ML 要小. 可见本文算法的分辨性能优于 ML 算法. 这一点与 ML 算法在相干源时的性能下降是一致的.

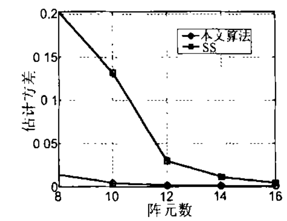

图 3 阵元数变化时本文算法与 SS 算法的估计方差比较曲线

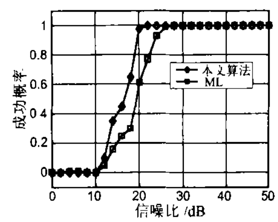

图 4 本文算法与 ML 算法的成功概率比较曲线

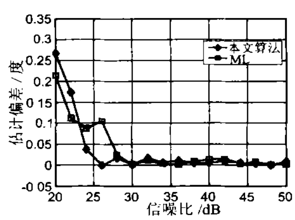

图 5 本文算法与 ML 算法的估计偏差比较曲线

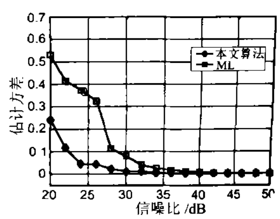

图 6 本文算法与 ML 算法的估计方差比较曲线

同时我们注意到本文算法与最大似然算法都属于高维的参数搜索算法,虽然它们的性能优越,但运算量却很大. 矩阵求逆通常是算法实时实现的运算瓶颈所在. 在本文的实验中我们使用遗传算法作为它们的优化工具. 运算量主要集中在对个体评估函数的计算上,对于最大似然算法的个体评估,它

需要求解阵列流形矩阵 $A(\theta)$ 的投影矩阵,它需要完成 $N \times N$ 矩阵求逆,而对于本文算法我们只需要在求解加权矩阵时对 $L \times L$ 矩阵求逆.当子阵数选取较少时,本文算法在运算量上较常规的 ML 算法有一定的优越性.

6　结论

本文基于文献[1]中提出的加权空间平滑技术(WSS: weighted spatial smoothing),利用最优 WSS 后的阵列协方差矩阵的 Toeplitz 性,通过 WSS 后阵列协方差矩阵的 Toeplitz 拟合,获得了相干源的方位估计.分辨性能的蒙特卡罗仿真实验表明,该算法对空间相干信源的分辨性能优于常规的空间平滑算法和 ML 算法,特别是在小阵列时其优越性更为突出.本文算法不需要对阵列协方差矩阵进行特征分解而且在经过大约 100 次的遗传迭代后便可获得理想的方位估计精度,但其运算量还是比较大的,但我们可以通过遗传算法的并行实现机制来节省运算时间.

参考文献:

[1] Wang Bu-Hong, Wang Yong-Liang, Chen Hui. Weighted spatial smoothing for direction-of-arrival estimation of coherent signals[A]. Proceedings of IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium[C]. San Antonio, Texas, USA: IEEE, APSIS, 16 - 21, Jun, 2002, Volume2. 668 - 671.

[2] T J Shan, M Wax, T Kailath. On spatial smoothing for direction-of-arrival estimation of coherent signals[J]. IEEE Trans ASSP, Aug, 1985, 33(4): 806 - 811.

[3] S U Pillai, B H Kwon. Forward-backward spatial smoothing techniques for the coherent signal identification[J]. IEEE Trans ASSP, Jan, 1989, 37(1): 8 - 15.

[4] R T Williams, S Prasad, A K Mahalanabis. An improved spatial smoothing technique for bearing estimation in a multipath environment[J]. IEEE Trans ASSP, Apr 1988, 36(4): 425 - 432.

[5] Yang-Ho Choi. On conditions for the rank restoration in forward/backward spatial smoothing[J]. IEEE Trans SP, Nov, 2002, 50(11): 2900 - 2901.

[6] K Takao, N Kikuma. An adaptive array utilizing an adaptive spatial averaging technique for multipath environments[J]. IEEE Trans AP. Dec. 1987, 35: 1389 - 1396.

[7] A Paulraj, V U Reddy, T Kailath. Analysis of signal cancellation due to multipath in optimum beamformers for moving arrays[J]. IEEE J Ocean. Eng, Jan 1987, OE-12: 163 - 172.

[8] Raghunath, K J, Reddy V U. A note on spatially weighted subarray covariance averaging schemes[J]. IEEE Trans AP, Jun, 1992, 40(6): 720 - 723.

[9] Kah-Chye Tan, Geok-Lianoh. Estimating directions-of-arrival of coherent signals in unknown correlated noise via spatial smoothing[J]. IEEE Trans SP, Apr, 1997, 45(4): 1087 - 1091.

[10] Serebryakov G V. Adaptive array utilizing improved spatial averaging technique[J]. Electronics Letters, 2000, 36(5): 471 - 472.

[11] Z M Ichalewicz. Genetic algorithm + Data structures = Evolution Program[M]. Springer-Verlag Berlin: Heidelberg 1994, Chapter 5.

[12] 程云鹏. 矩阵论[M]. 西安:西北工业大学出版社,1999.

作者简介:

王布宏　男,1975 年生于山西太原,空军工程大学博士生,已发表论文 10 余篇,主要从事阵列信号处理、空间谱估计研究.

王永良　男,1965 年生于浙江嘉兴,教授,博士生导师,1994 年获西安电子科技大学博士学位,1994 年 6 月～1996 年 12 月在清华大学做博士后,中国电子学会无线电定位技术委员会委员,现为空军雷达学院雷达兵器运用工程全军重点实验室主任,已发表论文 100 多篇,收入三大检索 40 多篇,出版《空时自适应信号处理》专著一部,曾获省部级科技进步一等奖、二等奖、三等奖各一项,曾获教育部"全国青年教师奖"和人事部"中国优秀博士后奖",主要研究领域为:雷达技术、阵列信号处理、自适应信号处理等.

陈　辉　男,1974 年生于江苏启东,武汉空军雷达学院兵器运用工程重点实验室讲师,已发表论文 10 余篇,主要研究方向:超分辨谱估计、阵列信号处理.